Cours de mathématiques P.S.I.*

D'après les cours de M. Guillaumie

Henriet Quentin

LibreOffice 3.3

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-ev.

I. Norme

I.1. Définition et premières propriétés

Définition :

On appelle norme de E (ou sur E) toute application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ (positivité)
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda \cdot x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)
3. $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)
4. $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$ (axiome de séparation)

Une norme est généralement notée N, $\|\ \|$, $\|\ \|_p$, $p \in \mathbb{R}_+^*$, $\|\ \|_\infty$.

Remarque :

Si N est homogène, en prenant $\lambda = 0$, $N(0 \cdot x) = |0| N(x) = 0$, donc $N(0_E) = 0$: la réciproque de l'axiome de séparation est déjà acquise.

Définition :

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé.

Proposition :

Soit $N : E \to \mathbb{R}$ telle que $N(0_E) = 0$ et $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) \leqslant |\lambda| \cdot N(x)$. Alors N est homogène.

Preuve :

1^{er} cas : $\lambda = 0$: $N(0 \cdot x) = N(0_E) = 0 = 0 \cdot N(x)$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\lambda \neq 0$: on pose $y = \lambda \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda} y$, alors $N\left(\frac{1}{\lambda} y\right) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| \cdot y \Leftrightarrow N(x) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} N(\lambda \cdot x) \Leftrightarrow N(\lambda \cdot x) \geqslant |\lambda| \cdot N(x)$.

Note :

Dans la suite du chapitre, on note $\|\ \|$ une norme de E.

Définition :

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est unitaire ou normé pour $\|\ \|$ si $\|x\| = 1$.

Proposition :

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. $\frac{x}{\|x\|}$ est normé.

Proposition : 2ème inégalité triangulaire :

Soit $(x, y) \in E^2$. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\|$.

Preuve :

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x+y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$.

De même, $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$.

Définition :

On appelle distance associée à la norme $\|\ \|$ l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposition :

La distance d associée à $\|\ \|$ vérifie :

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \geqslant 0$.
2. $\forall (x, y) \in E^2,\ d(y, x) = d(x, y)$
3. $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$
4. $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Remarque :

Soit E un espace non vide. Toute application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés de la proposition est appelée distance sur E.

Définition :

Soit $a \in E$ (E normé) et $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On appelle distance de a à A le réel noté $d(a, A)$ vérifiant $d(a, A) = \inf\{\|a - x\|,\ x \in A\}$.

1.2. Exemples fondamentaux

1.2.1. Norme euclidienne

Théorème :

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace vectoriel réel muni d'un prduit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$ (espace préhilbertien réel).
L'application $\|\ \|_2\ :\ x\in E\mapsto\sqrt{\langle x|x\rangle}$ est une norme sur E, dite norme euclidienne.

Remarques :

- L'inégalité triangulaire est le point délicat, elle provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Quand on pense être en présence d'une norme euclidienne, on détermine ce qui doit être le produit scalaire associé et on montre que c'est bien un produit scalaire sur E.

1.2.2. $E=\mathbb{K}^n$

Définition :

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. On note $\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$, $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}$, et $\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(|x_i|)$

Proposition :

$\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ et $\|\ \|_\infty$ sont trois normes de $\mathbb{K}^n$, dites normes usuelles de $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

$\|\ \|_1$: − Positivité évidente.

− Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\ \Rightarrow\ \|\lambda x\|_1=\sum_{i=1}^n|\lambda x_i|=|\lambda|\|x\|_1\ \Rightarrow$ Homogénéité.

− Soient $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$, $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
$\|x+y\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i+y_i|\ \leqslant\ \sum_{i=1}^n|x_i|+\sum_{i=1}^n|y_i|=\|x\|_1+\|y\|_1\ \Rightarrow$ Inégalité triangulaire.

− Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_1=0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^n|x_i|=0$, donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|x_i|=0$
Donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=0$, donc $x=0_{\mathbb{K}^n}\ \Rightarrow$ Axiome de séparation.

$\|\ \|_2$: Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Il s'agit de la norme issue du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$: Si $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$, $\langle x|y\rangle=\sum_{i=1}^n x_iy_i$. Ainsi $\|x\|_2=\sqrt{\langle x|x\rangle}$, et on sait que $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

$\|\ \|_\infty$: Si $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty=\max|x_i|$ vérifie : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|x_i|\leqslant\|x\|_\infty$, et $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|$.
− $|x_i|=\|x\|_\infty$, et $|x_i|\geqslant0\ \Rightarrow$ Positivité.
− Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$. $\lambda x=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$, et $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|\lambda x_i|=|\lambda||x_i|\leqslant|\lambda||x_{i_0}|=|\lambda x_{i_0}|$
Ainsi $|\lambda x_{i_0}|$ majore $\{|\lambda x_i|,\ i\in[\![1,n]\!]\}$, et y appartient, donc $|\lambda||x_{i_0}|=\max\{|\lambda x_i|,\ i\in[\![1,n]\!]\}$.
Ainsi $\|\lambda x\|_\infty=|\lambda|\|x\|_\infty\ \Rightarrow$ Homogénéité.
− Soient $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n$. $x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$.
Soit $i\in[\![1,n]\!]$, $|x_i+y_i|\leqslant|x_i|+|y_i|\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$, donc $\|x\|_\infty+\|y\|_\infty$ majore $\{|x_i+y_i|,\ i\in[\![1,n]\!]\}$
Donc $\|x+y\|_\infty\leqslant\|x\|_\infty+\|y\|_\infty\ \Rightarrow$ Inégalité triangulaire.
− Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\|x\|_\infty=0$. $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $0\leqslant|x_i|\leqslant\|x\|_\infty=0$, donc $|x_i|=0$, donc $x_i=0$.
Ainsi $x=0_E\ \Rightarrow$ Axiome de séparation.

Proposition : généralisation du cas précédent :

On suppose que E est un espace de dimension n finie, $n\geqslant1$. Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.
Pour $\vec{x}=\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i\in E$, on note $\|\vec{x}\|_{1,\mathcal{B}}=\sum_{i=1}^n|x_i|$, $\|\vec{x}\|_{2,\mathcal{B}}=\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}$, et $\|\vec{x}\|_{\infty,\mathcal{B}}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$.
$\|\ \|_{1,\mathcal{B}}$, $\|\ \|_{2,\mathcal{B}}$ et $\|\ \|_{\infty,\mathcal{B}}$ sont des normes de E, associées à la base $\mathcal{B}$.

1.2.3. $E=\mathscr{C}^0([a\,,\,b]\,,\,\mathbb{K})$

Définition :

Soit $f\in\mathscr{C}^0([a\,,b],\mathbb{K})$, on pose $\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt$, $\|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)^2|dt}$, et $\|f\|_\infty=\sup|f(t)|$

Proposition :

$\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, et $\|\ \|_\infty$ sont des normes de E.

Preuve :

- Soit $\lambda\in\mathbb{K}$, $f\in E$. $\|\ \|_1$ est positive, et $\|\lambda f\|_1=\int_a^b|\lambda f|=|\lambda|\int_a^b|f|=|\lambda|\|f\|_1$ $\rightarrow$ Homogénéité.
- Soient f et $g\in E$, $\|f+g\|_1=\int_a^b|f+g|\leqslant\int_a^b|f|+|g|=\int_a^b|f|+\int_a^b|g|=\|f\|_1+\|g\|_1$ $\rightarrow$ Inégalité triangulaire.
- Soit $f\in E$ tel que $\|f\|_1=0$, $|f|$ est continue sur $[a\,,b]$ et positive, donc $\int_a^b|f|=0$, par théorème, $|f|$ est nulle et donc f est nulle $\rightarrow$ axiome de séparation.

Ainsi, $\|\ \|_1$ est une norme sur E.

Pour montrer que $\|\ \|_2$ est une norme euclidienne sur E, on introduit ce qui doit être le produit scalaire associé.

Si f et $g\in E$, $\langle f|g\rangle=\int_a^b fg$, est linéaire à droite par linéarité de l'intégrale, symétrique, positive par positivité de l'intégrale. Soit $f\in E$ telle que $\langle f|f\rangle=0$, $\int_a^b f^2=0$, f^2 est continue et positive sur $[a\,,b]$, donc par théorème $f^2=0$, et donc $f=0$. Ainsi $\langle\ |\ \rangle$ est un produit scalaire, donc $\|\ \|_2$ est une norme euclidienne.

Le cas de $\|\ \|_\infty$ sera étudié plus généralement dans le paragraphe suivant.

1.2.4. Norme de la convergence uniforme sur A

Définition :

Soit $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\varnothing$. On note $\mathscr{B}(A\,,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$ qui sont bornées sur A.

Propriété :

$\mathscr{B}(A\,,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(A\,,\mathbb{K})$.

Définition :

$\forall f\in\mathscr{B}(A\,,\mathbb{K})$, on pose $\|f\|_{\infty,A}=\sum_{t\in A}|f(t)|$.

Théorème :

$\|\ \|_{\infty,A}$ est une norme sur $\mathscr{B}(A\,,\mathbb{K})$ appelée norme de convergence uniforme sur A, ou norme infinie sur A.

Preuve :

Soit $f\in\mathscr{B}(A\,,\mathbb{K})$. $\forall t\in A$, $|f(t)|\leqslant\|f\|_\infty$. Soit $M\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall t\in A$, $|f(t)|\leqslant M$. Alors $\|f\|_\infty\leqslant M$.

En effet $\|f\|_\infty$ est le plus petit des majorants. On dit qu'on « passe au sup à gauche ».

- Soit $f\in E$, et $t\in A$. $\|f\|_\infty\geqslant|f(t)|\geqslant 0$ $\Rightarrow$ Positivité.
- Soient $f\in E$, $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $t\in A$, $|\lambda f(t)|=|\lambda||f(t)|\leqslant|\lambda|\|f\|_\infty$. Par passage au sup à gauche, $\|\lambda f\|_\infty\leqslant|\lambda|\|f\|_\infty$.

  $\|0\|_\infty=0$, donc si $\lambda=0$, $\|\lambda f\|_\infty=|\lambda|\|f\|_\infty$, et si $\lambda\neq 0$, on pose $\lambda f=g\in E\ \Leftrightarrow\ f=\frac{1}{\lambda}g$.

  On a alors $\left\|\frac{1}{\lambda}g\right\|_\infty\leqslant\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|g\|_\infty\ \Leftrightarrow\ \|f\|\leqslant\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|\lambda f\|_\infty\ \Leftrightarrow\ |\lambda|\|f\|_\infty\leqslant\|\lambda f\|_\infty$, donc $|\lambda|\|f\|_\infty=\|\lambda f\|_\infty$ $\Rightarrow$ Homogénéité.
- Soient f et $g\in E$. Soit $t\in A$, $|(f+g)(t)|=|f(t)+g(t)|\leqslant|f(t)|+|g(t)|\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$.
  Par passage au sup à gauche, $\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$ $\Rightarrow$ Inégalité triangulaire.
- Soit $f\in E$ tel que $\|f\|_\infty=0$. $\forall t\in A$, $0\leqslant|f(t)|\leqslant\|f\|_\infty=0$, donc $|f(t)|=0$, donc $f(t)=0$ $\Rightarrow$ Séparation.

1.2.5. Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique

Définition :

Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$.

On note $L_1(I)=\{f\in\mathscr{C}^0(I\,,\mathbb{K})$ tel que f est intégrable sur $I\}$.

On note $L_2(I)=\{f\in\mathscr{C}^0(I\,,\mathbb{K})$ tel que $|f|^2$ est intégrable sur $I\}$.

Définition :

Si $f\in L_1(I)$, on note $\|f\|_1=\int_I|f|$.

Si $f\in L_2(I)$, on note $\|f\|_2=\sqrt{\int_I|f|^2}$.

Lemme :

$L_2(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{K})$.

Preuve :

- $\vec{0_E}\in L_2(I)$
- Si $f\in L_2(I)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda f\in L_2(I)$
- Soit $(f,g)\in L_2(I)^2$. $|f+g|^2=|f|^2+|g|^2+2\,\mathfrak{Re}(\bar{f}\,g)\leqslant|f|^2+|g^2|+2|\bar{f}\,g|$

  De plus $(2|f|^2+2|g|^2)-(|f|^2+|g|^2-2|f||g|)=|f|^2+|g|^2-2|f||g|=(|f|-|g|)^2\geqslant 0$

  Donc $|f|^2+|g|^2+2|f||g|\leqslant 2|f|^2+2|g|^2$, ainsi $|f+g|^2$ est intégrable sur I par théorème de domination.

Théorème :

$\|\ \|_1$ est une norme sur $L_1(I)$ appelée norme de la convergence en moyenne sur I.

$\|\ \|_2$ est une norme euclidienne sur $L_2(I)$ appelée norme de la convergence en moyenne quadratique sur I.

1.3. Boules et sphères

Définition :

Soient $(E,\|\ \|)$ un espace vectoriel normé, $a\in E$, $r\in\mathbb{R}_+$.

1. On appelle boule ouverte de centre a et de rayon $r>0$ l'ensemble $\mathscr{B}(a,r)=\{x\in E \text{ tel que } \|x-a\|<r\}$.
2. On appelle boule fermée de centre a et de rayon $r\geqslant 0$ l'ensemble $\overline{\mathscr{B}}(a,r)=\{x\in E \text{ tel que } \|x-a\|\leqslant r\}$.
3. On appelle sphère de centre a et de rayon $r\geqslant 0$ l'ensemble $\mathscr{S}(a,r)=\{x\in E \text{ tel que } \|x-a\|=r\}$.

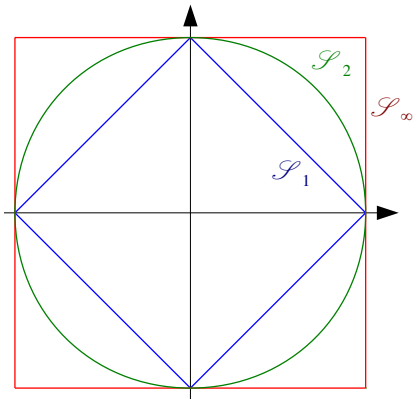
Si $a=\vec{0_E}$ et $r=1$, on parle de boule (ouverte ou fermée) unité et de sphère unité.

Définition :

Soit $A\subset E$ tel que $A\neq\emptyset$. On dit que A est une partie bornée de E pour la norme $\|\ \|$ si $\exists r\geqslant 0$ tel que $A\subset\overline{\mathscr{B}}(\vec{0_E},r)$, c'est-à-dire si $\exists r\geqslant 0$ tel que $\forall x\in A$, $\|x\|\leqslant r$.

Exemple :

Sphères unités pour les normes $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, et $\|\ \|_\infty$ dans $\mathbb{R}^2$:



1.4. Normes équivalentes

Définition :

Soient N et $\|\ \|$ deux normes sur E.

On dit que N est équivalente à $\|\ \|$ si $\exists\alpha,\beta>0$ tels que $\forall x\in E$, $\alpha\|x\|\leqslant N(x)\leqslant\beta\|x\|$.

On a aussi $\forall x\in E$, $\dfrac{1}{\beta}N(x)\leqslant\|x\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha}N(x)$, donc $\|\ \|$ est équivalement à N.

Proposition :

Soit $x\in E$, on a $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2\leqslant n\|x\|_\infty$. Ainsi, les normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

Preuve :

Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$, $\exists i_0\in[\![1,n]\!]$ tel que $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|$

Ainsi $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|\ \leqslant\ \sum_{i=1}^n|x_i|=\|x\|_1=\sum_{i=1}^n 1\,|x_i|\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant}\sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}=\sqrt{n}\|x\|_2$

Or $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|x_i|^2\leqslant\|x\|_\infty^2\ \Rightarrow\ \|x\|_2\ \leqslant\ \sqrt{\sum_{i=1}^n\|x\|_\infty^2}=\sqrt{n}\|x\|_\infty$

On a ainsi $\|x\|_\infty\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2\leqslant n\|x\|_\infty$, ce qui prouve que $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ sont équivalentes.

$\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2$ et $\|x\|_2\leqslant\sqrt{n}\|x\|_\infty\leqslant\sqrt{n}\|x\|_1\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant\sqrt{n}\|x\|_2\ \Rightarrow\ \|\ \|_2$ et $\|\ \|_1$ sont équivalentes.

Théorème (admis) :

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
En dimension infinie, ce résultat est faux.

Exemple :

Soit $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On veut montrer que $\|\ \|_\infty$ et $\|\ \|_1$ ne sont pas équivalentes sur E. On utilise des suites d'éléments de E. Soit $f_n(x)=\begin{cases}1-nx, & \text{si } x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]\\ 0, & \text{si } x\in\left[\frac{1}{n},1\right]\end{cases}$, $\|f_n\|_\infty=1$, et $\|f_n\|_1=\int_0^1|f_n|=\int_0^1 f_n=\frac{1}{2n}$

On raisonne par l'absurde : on suppose que les deux normes sont équivalentes :

$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall f\in E,\ \alpha\|f\|_1\leqslant\|f\|_\infty\leqslant\beta\|f\|_1$, et en particulier pour f_n : $\frac{\alpha}{2n}\leqslant 1\leqslant\frac{1}{2\beta}$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $1\leqslant 0$, ce qui n'est pas. Ainsi $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes dans E.

Dans le cas de $E=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on peut utiliser $x\mapsto x^n$, les fonctions « à pics » comme celle utilisée, ou encore les fonctions trigonométriques $x\mapsto\sin(n\pi x)$.

2. Suites vectorielles

Dans cette partie, $(E,\|\ \|)$ désigne un espace vectoriel normé, et $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$.

2.1. Suite convergente

Définition :

Soit $l\in E$. On dit que la suite (x_n) converge vers l au sens de $\|\ \|$ si $(\|x_n-l\|)$ converge vers 0.
On dit alors que l est limite de la suite (x_n) pour la norme $\|\ \|$. On note $l=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Remarque :

La notion de convergence d'une suite dépend de la norme considérée.

Proposition :

Si (x_n) converge dans $(E,\|\ \|)$, sa limite est unique.

Preuve :

Supposons que (x_n) converge vers l et l', où l et l' sont deux éléments distincts de E.

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l \Leftrightarrow \|x_n-l\|\underset{n\to\infty}{\to}0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \|x_n-l\|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ x_n\in\mathscr{B}(l,\varepsilon)$.

De même, $x_n\in\mathscr{B}(l',\varepsilon)$. Or $l\neq l'$ donc $\|l-l'\|>0$. On choisit $\varepsilon=\frac{\|l-l'\|}{2}>0$.

$\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \|x_n-l\|<\varepsilon$ et $\exists N'\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N',\ \|x_n-l'\|<\varepsilon$.

Soit $n\geqslant\max(N,N')$. $\|l-l'\|=\|(l-x_n)+(x_n-l')\|\ <\ 2\varepsilon=\|l-l'\|$.

On obtient $0<\|l-l'\|<\|l-l'\|$ Impossible, donc $l=l'$.

2.2. Propriétés algébriques

Proposition :

Si (x_n) converge vers l pour la norme $\|\ \|$, alors $(\|x_n\|)$ converge vers $\|l\|$.

Preuve :

$\big|\|x_n\|-\|l\|\big|\leqslant\|x_n-l\|\underset{n\to\infty}{\to}0$, donc par encadrement $(\|x_n\|-\|l\|)$ converge vers 0.

Proposition :

Si (x_n) converge dans $(E, \|\ \|)$, elle est bornée. La réciproque est fausse.

Proposition :

Soient des suites (x_n) et $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Si (x_n) converge vers l dans $(E, \|\ \|)$ et (y_n) converge vers L dans $(E, \|\ \|)$, alors $(\lambda x_n + \mu y_n)$ converge vers $\lambda l + \mu L$ dans $(E, \|\ \|)$.

Proposition :

Soient $(\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$, et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergente vers l dans $(E, \|\ \|)$.
Alors $(\lambda_n x_n)$ converge vers λl dans $(E, \|\ \|)$.

Preuve :

$\|\lambda_n x_n - \lambda l\| = \|\lambda_n x_n - \lambda_n l + \lambda_n l - \lambda l\| \leqslant \|\lambda_n x_n - \lambda_n l\| + \|\lambda_n l - \lambda l\| = |\lambda_n| \|x_n - l\| + |\lambda_n - \lambda| \|l\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Par domination $\|\lambda_n x_n - \lambda l\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

2.3. Suites extraites

Définition :

Une suite $(y_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est dite extraite de (x_n) si $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi(n)}$.

Proposition :

Si (x_n) converge vers l pour $\|\ \|$, toute suite extraite de cette suite converge aussi vers l pour $\|\ \|$.

Proposition :

Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists l \in E$ tel que $x_{2n} \underset{n\to\infty}{\to} l$ et $x_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} l$. Alors $x_n \underset{n\to\infty}{\to} l$.

2.4. Suites de Cauchy

Définition :

On dit que la suite (x_n) est de Cauchy pour $\|\ \|$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\forall m \geqslant N$, $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Propriété :

(x_n) est de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.

Proposition :

Si (x_n) converge dans $(E, \|\ \|)$ vers $l \in E$, alors (x_n) est de Cauchy.

Preuve :

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $\|x_n - l\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \geqslant N$ et $n \geqslant N$.

$$\|x_m - x_n\| = \|(x_m - l) + (l - x_n)\| \leqslant \underbrace{\|x_m - l\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\|l - x_n\|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

Définition :

Un espace vectoriel normé est dit complet pour $\|\ \|$ si toute suite de Cauchy pour $\|\ \|$ est convergente pour $\|\ \|$.

Remarque :

Tout espace vectoriel normé n'est pas complet.

Théorème (admis) :

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Définition :

Soit $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy pour les séries si $\forall \varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \forall p\geqslant 1,\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon$.

Propriété :

La série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy $\Leftrightarrow$ (S_n) est de Cauchy.

Proposition :

Toute série numérique vérifiant le critère de Cauchy converge.

Proposition :

On retrouve le théorème : Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge, où $(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Preuve :

Soit $\varepsilon>0$. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $p\in\mathbb{N}^*$. $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_n|$. Par hypothèse, $\sum u_n$ converge, elle vérifie donc le critère de Cauchy. $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k|<\varepsilon$. Ainsi $\forall n\geqslant N,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon$, donc $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy, donc converge.

Proposition :

Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$. On suppose qu'il existe $(\alpha_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant n_0,\ \forall p\in\mathbb{N}^*,\ \|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\alpha_n$ et $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Alors la suite (x_n) est de Cauchy pour $\|\ \|$.

Preuve :

Soit $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n\geqslant N,\ 0\leqslant\alpha_n\leqslant\varepsilon$. Soit $N'=\max(N,n_0)$.
$\forall n\geqslant N',\ \forall p\in\mathbb{N},\ \|x_{n+p}-x_n\|\leqslant\alpha_n<\varepsilon$, donc (x_n) est de Cauchy pour $\|\ \|$.

2.5. Convergence des suites et normes équivalentes

Théorème :

Si N et $\|\ \|$ sont deux normes équivalentes de E,
(x_n) converge vers $l\in E$ pour N $\Leftrightarrow$ (x_n) converge vers l pour $\|\ \|$.

Preuve :

$\exists\alpha,\beta>0$ tels que $\forall x\in E,\ \alpha N(x)\leqslant\|x\|\leqslant\beta N(x)$

$\Rightarrow$: Par hypothèse, (x_n) converge vers l pour $\|\ \|$, c'est-à-dire $\|x_n-l\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant N(x_n-l)\leqslant\frac{1}{\alpha}\|x_n-l\|$, et $\frac{1}{\alpha}\|x_n-l\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc $N(x_n-l) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ par théorème d'encadrement.

$\Leftarrow$: Par hypothèse, (x_n) converge vers l pour N, c'est-à-dire $N(x_n-l) \underset{n\to\infty}{\to} 0$

Or $\forall n\in\mathbb{N},\ 0\leqslant\|x_n-l\|\leqslant\beta N(x_n-l)$, et $\beta N(x_n-l) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc $\|x_n-l\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$ par théorème d'encadrement.

Proposition :

Soient $\|\ \|$ et N deux normes de E, on suppose que $\exists\alpha>0$ tel que $\forall x\in E,\ \|x\|\leqslant\alpha N(x)$.
Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$, et $l\in E$. Si (x_n) converge vers l pour N, alors (x_n) converge vers l pour $\|\ \|$.

Proposition :

Soit $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$. $\forall f\in E,\ \|f\|_1\leqslant\sqrt{b-a}\|f\|_2\leqslant(b-a)\|f\|_\infty$.

Preuve :

– Soit $f\in E,\ \|f\|_1=\int_a^b|f|\ \leqslant\ \sqrt{\int_a^b 1^2}\sqrt{\int_a^b|f|^2}=\sqrt{b-a}\|f\|_2$.

– $\forall t\in[a,b],\ |f(t)|\leqslant\|f\|_{\infty,[a,b]}\ \Rightarrow\ |f(t)|^2\leqslant\|f\|^2_{\infty,[a,b]}\ \Rightarrow\ \int_a^b|f^2|\leqslant\int_a^b\|f\|^2_{\infty,[a,b]}=(b-a)\|f\|^2_{\infty,[a,b]}$

$\Rightarrow\ \|f\|_2\leqslant\sqrt{b-a}\|f\|_{\infty,[a,b]}$

Corollaire :

Soit $(f_n)\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ et $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{K})$.

– Si (f_n) converge vers f pour $\|\ \|_\infty$, alors (f_n) converge vers f pour $\|\ \|_2$.

– Si (f_n) converge vers f pour $\|\ \|_2$, alors (f_n) converge vers f pour $\|\ \|_1$.

2.6. Suites composantes

Définition :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension $p\geqslant 1$. Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_p)$ une base de E.

Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$. On appelle suites composantes de la suite (x_n) dans la base $\mathcal{B}$ les suites $(x_{n,i})$ où $i\in[\![1,p]\!]$ telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=\sum_{i=1}^p x_{n,i}\vec{e}_i$.

Théorème :

Soient E un espace vectoriel normé de dimension p finie, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.

Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$, on note $(x_{n,i})$ les suites composantes de (x_n) dans la base $\mathcal{B}$ ($i\in[\![1,p]\!]$)

Soit $l\in E$ tel que $l=\sum_{i=1}^p l_i\vec{e}_i$, alors (x_n) converge vers l dans $E\ \Leftrightarrow\ \forall i\in[\![1,p]\!],\ (x_{n,i})$ converge vers l_i dans $\mathbb{K}$.

Preuve :

On munit E de la norme 1 associée à la base $\mathcal{B}$: si $x=\sum_{i=1}^p x_i\vec{e}_i$, alors $\|x\|=\sum_{i=1}^p|x_i|$

On sait que (x_n) converge vers l dans $E\ \Leftrightarrow\ (x_n)$ converge vers l pour $\|\ \|$.

$\Rightarrow$: Par hypothèse, $\|x_n-l\|\underset{n\to\infty}{\to}0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p|x_{n,i}-l_i|\underset{n\to\infty}{\to}0$. Soit $i\in[\![1,p]\!]$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$ on a

$0\leqslant|x_{n,i}-l_i|\leqslant\|x_n-l\|$, or $\|x_n-l\|\underset{n\to\infty}{\to}0$, et par théorème d'encadrement $|x_{n,i}-l_i|\underset{n\to\infty}{\to}0\ \Rightarrow\ (x_{n,i})$ converge vers l_i

$\Leftarrow$: Soit $i\in[\![1,p]\!]$, par hypothèse $x_{n,i}\underset{n\to\infty}{\to}l_i$, donc $x_{n,i}\vec{e}_i\underset{n\to\infty}{\to}l_i\vec{e}_i$ ($\|x_{n,i}\vec{e}_i-l_i\vec{e}_i\|=|x_{n,i}-l_i|\underbrace{\|\vec{e}_i\|}_{\in\mathbb{R}}$, $|x_{n,i}-l_i|\underset{n\to\infty}{\to}0$).

Par combinaison linéaire de suites convergentes, $\left(\sum_{i=1}^p x_{n,i}\vec{e}_i\right)$ converge vers $\sum_{i=1}^p l_i\vec{e}_i$, donc (x_n) converge vers l.

* * * * *